ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ТРЕУГОЛЬНИКИ»

Фазлеева Эльмира Илдаровна, к.п.н., доцент
Тугашова Регина Михайловна, студентка ИМиМ 5 курса
Казанский (Приволжский) федеральный университет
elmira.fazleeva@mail.ru, regina-2909@mail.ru

Аннотация: В данной статье рассматриваются общие методические положения по обучению школьников решению геометрических задач. На конкретном примере излагаются все этапы работы над задачей.

Ключевые слова: обучение математике, процесс решения задачи, этапы решения задачи, поиск решения задачи, анализ.

TRAINING STUDENTS SOLVE PROBLEMS ON «TRIANGELS»

Fazleeva Elmira Ildarovna, PhD in Education, Associate Professor
Tugashova Regina Mikhailovna, student of 5 course
Kazan Federal University,
elmira.fazleeva@mail.ru , regina-2909@mail.ru

Abstract: This article contains general methodological provisions for training students to solve geometric problems. In the particular example set out all stages of the problem.

Keywords: mathematics teaching, the process of solving the problem, the steps for solving the problem, the search for solutions of the problem, analysis.

Если вы хотите научиться плавать,
то смело входите в воду,
а если хотите научиться решать задачи,
то решайте их.
Д. Пойа.

В процессе обучения математике задачи выполняют разнообразные функции. Математические задачи являются очень эффективным и часто незаменимым средством усвоения учащимися понятий и методов школьного курса математики. Велика роль задач в развитии мышления и в математическом воспитании учащихся, в формировании у них умений и навыков в практических применениях математики.

Решение задач хорошо служит достижению всех тех целей, которые ставятся перед обучением математике:

- мировоззренческих, которые определяют отношение и место математики в реальном мире;
- информативных, которые связаны с усвоением учащимися общественно-исторического опыта в области математики, в том числе математических идей и методов;
- практических, которые связаны с овладением учащимися методом математического моделирования, умениями применять полученные знания для решения задач в жизненной практике, других учебных предметах, технике и пользоваться математическими инструментами, таблицами, схемами и т.д.;
- воспитательных, которые направлены на создание условий для развития устойчивого интереса к познанию, к изучению математики и таких качеств личности, как воля, настойчивость, инициатива, самостоятельность и активность, а также на способности к эстетическому восприятию явлений действительности в математическом аспекте, к самостоятельному творчеству; общей культуры, в том числе коммуникативной; ответственного отношения к окружающей среде;
- развивающих, которые определяют возможности математики как учебного предмета в развитии качеств мышления человека. [3]

В связи с вышесказанным, правильная методика обучения решению математических задач играет существенную роль в формировании высокого уровня математических знаний, умений и навыков учащихся. Особый интерес в данном контексте представляют геометрические (планиметрические) задачи.

Как известно, геометрия – наиболее уязвимое звено школьной математики. Это связано как с обилием различных типов геометрических задач, так и с многообразием приемов и методов их решения. В отличие от алгебры, в геометрии нет стандартных задач, решающихся по образцу. Практически каждая геометрическая задача требует «индивидуального» подхода. Но, несмотря на это, можно подчеркнуть общую идею обучения решению геометрических задач – при планировании урока учителю необходимо обратить внимание учащихся на теоретический материал, необходимый при решении задачи, переосмыслить его содержание на практике. Такой методический прием подготовит учащихся к успешному восприятию и осмыслению конкретной задачи, к осознанному применению теории на практике, будет способствовать закреплению ранее изученного материала, приобретенные математические знания станут более прочными.

В методике обучения математике выделяют четыре этапа работы при решении геометрических задач:

1) работа с текстом задачи;
2) этап поиска пути решения (анализ);
3) запись решения;
4) исследовательский этап.

Этап 1. *Работа с текстом задачи.* На данном этапе необходимо внимательно прочитать текст задачи (утверждения); выделить условие и требование (заключение):

- чтобы выделить условие, нужно выяснить, о каких фигурах идет речь, каким способом фигуры заданы, какие величины их характеризуют; как фигуры взаимосвязаны условием расположения на плоскости по отношению друг другу; как связаны характеристики;

- для того, чтобы выделить требование, нужно выяснить, какие свойства фигуры (комбинации фигур) необходимо установить.

Результатом работы с текстом задачи является чертеж (если это необходимо) и краткая запись условия и требования.

Этап 2. *Поиск пути решения.* Поиск пути решения задачи можно осуществить следующими методами:

- восходящего анализа;
- нисходящего анализа;
- комбинацией двух предыдущих методов (это чаще всего имеет место на практике).

При восходящем анализе – от требования к условию:

- устанавливается понятие или отношение, включенное в требование задачи; вспоминаются соответствующие признаки;
- каждый из выделенных признаков сопоставляется с условием или следствием из условия;
- делается вывод о возможности или невозможности применения выделенного признака для получения требования.

При нисходящем анализе – от условия к требованию:

- формулируются следствия, вытекающие из условия задачи;
- каждое из следствий сопоставляется с требованием;
- устанавливается возможность использования каждого из выделенных следствий для конкретизации требования.

В результате составляется план решения задачи (определяется последовательность рассмотрения фигур, конечная цель рассмотрения каждой фигуры).

Этап 3. *Запись решения.* Запись решения задачи выполняется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к письменным работам по математике.

На каждом шаге записи решения указывается рассматриваемая геометрическая фигура; фиксируются ее свойства (характеристики), необходимые для получения следствия; фиксируется следствие. В конце решения записывается ответ.

Этап 4. *Исследовательский.* Последний этап работы над задачей предусматривает:

- анализ найденного решения, а именно выделение главной идеи решения, существенных его моментов;
- обобщение решения задач данного типа (если это целесообразно);
- выявление и закрепление в памяти приемов, которые были использованы на этапах решения задачи;
- поиск всех возможных способов решения, выбор рационального способа. [4]

Рассмотрим на конкретном примере особенности работы с геометрической задачей на каждом этапе ее решения.

Задача. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O так, что $BO=5$, $OK=3$. Найдите AH. [2]

Работа с текстом задачи.

После прочтения текста задачи мы можем выделить условие и требование задачи.

Дан равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *BC*. Проведены высоты *AH* и *BK*. *AH*∩*BK*=*O*, *BO*=*5*, *OK*=*3*. Найти высоту *AH*.

Чтобы сделать рисунок, необходимо вспомнить:

- определение понятий, включенных в условие и требование задачи (понятие равнобедренного треугольника, высоты в равнобедренном треугольнике);
- свойство высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника.

Трактовка выделенных понятий:

- Равнобедренным треугольником называется треугольник с двумя равными сторонами.
- Общая вершина равных сторон называется вершиной равнобедренного треугольника, а третья сторона основанием.
- Высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является медианой и биссектрисой.

Уточнив понятия, включенные в условие и требование задачи, сделаем рисунок и запишем, что дано, что нужно найти.

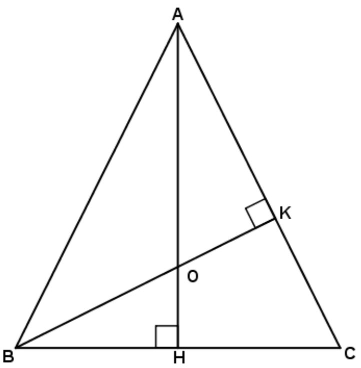

Рис. 1

Дано:
ABC – равнобедренный треугольник,
BC – основание,
AH и BK – высоты треугольника ABC,
O – точка пересечения высот AH и BK,
BO = 5, OK = 3.

Найти: *AH*.

Первый способ решения

Анализ

Высота *AH* в треугольнике *ABC* является его биссектрисой и медианой, следовательно, *AO* – биссектриса треугольника *ABC*, а также биссектриса треугольника *ABK*, а поэтому выполняется равенство: *BO:OK=AB:AK* (свойство биссектрисы треугольника*:* биссектриса треугольника делит третью сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам). Этот шаг целесообразен, т.к. стороны *BO* и *OK* известны.

Используя предыдущее равенство, можно составить уравнение и найти стороны *AB, AK, KC.*

Рассматриваем треугольник *ABK* (рис. 1). Треугольник *ABK* является прямоугольным, т.к. *BK* перпендикулярен *AC*. Из этого треугольника определяем *AK*. Далее, из прямоугольного треугольника *BCK*, находим *BC*. После чего, используя формулу нахождения площади треугольника (площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту), находим *AH*.

Запись решения

1. AH – высота $\triangle ABC$. Следовательно, AH является биссектрисой и медианой $\triangle ABC$. $AO \subset AH$, т.е. *AO* является биссектрисой и медианой $\triangle ABK$. Поэтому выполняется свойство биссектрисы:

$$\frac{BO}{OK} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{3}{5}.$$

2. Пусть $AK = 3x$, тогда $AB = 5x$ и в прямоугольном $\triangle ABK$:

$(5x)^2 - (3x)^2 = (5+3)^2$ (в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов); [1]

$$16x^2 = 64;\ x = 2;\ AB = 10;\ \ AK = 6.$$

3. $AC = AB \ \Rightarrow\ KC = 10 - 6 = 4.$

В прямоугольном $\triangle BCK$: $BC^2 = 8^2 + 4^2;\ BC = 4\sqrt{5}.$

4. Используя дважды формулу площади для $\triangle ABC$, получаем:

$$BC \cdot AH = AC \cdot BK, \text{т. е.} 4\sqrt{5} \cdot AH = 10 \cdot 8;\ AH = 20/\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Второй способ решения

Анализ

Проведем высоту CP (рис. 2). Рассмотрим треугольники BKC и BHO, они подобны (два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого), составим пропорцию и находим BH, BC, KC; применив теорему Пифагора, находим OH, AO. Используя дважды формулу площадей для треугольника ABC:

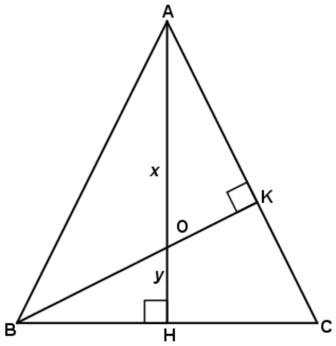

Рис. 4

$$S = \frac{1}{2}AH \cdot BC,$$
$$S = \frac{1}{2}BK \cdot AC$$

находим искомую высоту AH.

Запись решения

1. $\angle KBC$ − общий, $\angle BKC = \angle BHO = 90° \Rightarrow \Delta\ BKC \sim \Delta\ BHO \Rightarrow$

$$\frac{BK}{BH} = \frac{KC}{HO} = \frac{BC}{BO};\ \frac{BK}{BH} = \frac{BC}{BO};\ \frac{8}{BH} = \frac{2BH}{5};$$
$$2BH^2 = 40;\ BH = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \ \Rightarrow\ BC = 4\sqrt{5},$$
$$OH = \sqrt{25-20} = \sqrt{5}.$$

2. $\frac{KC}{HO} = \frac{BC}{BO};\ \frac{KC}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5};\ 5KC = 20;\ KC = 4.$

3. В прямоугольном треугольнике BPO с гипотенузой $BO=5$ имеем: PO=3, PB=4, т.е. $BO = \sqrt{PO^2 + PB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (рис.3) (египетский треугольник).

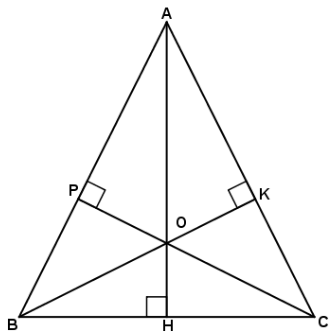

Рис. 2

4. Из прямоугольного треугольника APO имеем:
$AO = \sqrt{x^2 + 3^2}$, где $x=AP$. Следовательно, $AH = AO + OH = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{5}$.

5.Используем дважды формулу площадей:

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+9} + \sqrt{5}\right) \cdot 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\left(\sqrt{x^2+9} + \sqrt{5}\right)$$
$$= 2\sqrt{5(x^2+9)} + 10;$$
$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 8(4+x) = 4(4+x) = 16 + 4x.$$

Приравниваем $S_1 = S_2$:

$$2\sqrt{5(x^2+9)} + 10 = 16 + 4x;$$
$$\sqrt{5(x^2+9)} + 5 = 8 + 2x;$$
$$\sqrt{5(x^2+9)} = 3 + 2x.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$5(x^2+9) = 9 + 12x + 4x^2;\ 5x^2 + 45 - 9 - 12x - 4x^2 = 0;\ x^2 - 12x + 36 = 0;\ (x-6)^2 = 0;$
$x = 6$; т.е. AP=6. Следовательно,

$$AH = \sqrt{36+9} + \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $AH = 4\sqrt{5}$.

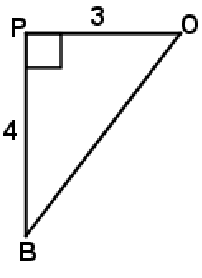

Рис. 3

Третий способ решения

Анализ

Высоту *AH (AO и OH)* возьмем как переменные (рис. 4). Далее из подобия прямоугольных треугольников (по острому углу: **если прямоугольные треугольники имеют равный острый угол, то такие треугольники подобны**) $\Delta\, AOH \sim \Delta\, AHC$ записываем отношения сторон, составляем уравнение и находим искомую высоту.

Запись решения

Возьмем $AO = x$, $OH = y$. Далее получим 2 уравнения из подобия прямоугольных треугольников (по острому углу).

1. $\Delta AHC \sim \Delta BKC$: $\frac{x+y}{AC} = \frac{8}{BC}$;

$\Delta\, AOK \sim AHC$: $\frac{x}{OK} = \frac{AC}{HC};\ \frac{x}{3} = \frac{AC}{HC};\ \frac{x}{OK} = \frac{AC}{BC:2};$

$x = 6 \cdot \frac{AC}{BC}$ (1) ; $x + y = 8\frac{AC}{BC}$ (2).

2. Разделим уравнение (1) на уравнение (2):

$\frac{x}{x+y} = 6\frac{AC}{BC} : 8\frac{AC}{BC}$; $\frac{x}{x+y} = 6 \cdot \frac{1}{8}$; $\frac{x}{x+y} = \frac{6}{8}$;

откуда $\frac{x}{x+y} = \frac{3}{4}$. (3)

3. $\triangle\ AOK \sim \triangle\ BOH$: $\frac{AO}{BO} = \frac{OK}{OH}$, т.е. $\frac{x}{5} = \frac{3}{y}$; $y = \frac{15}{x}$.

В уравнении (3) подставив вместо y выражение $\frac{15}{x}$, получим: $\frac{x}{x+\frac{15}{x}} = \frac{3}{4}$; $4x = 3x + \frac{45}{x}$; $x = \frac{45}{x}$; $x^2 = 45$; $x = 3\sqrt{5}$; $y = \frac{15}{x} = \frac{15}{3\sqrt{5}} = \sqrt{5}$;

$AH = x + y = 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Ответ: $AH = 4\sqrt{5}$.

Исследовательский этап

Таким образом, мы решили предложенную задачу тремя способами, каждый из которых привел нас к одному и тому же результату. Следовательно, задача решена верно, но можно подчеркнуть, что первый способ решения является наиболее рациональным.

Список литературы

1. Атанасян Л.С. Геометрия 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. – 19-е изд. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2009. – 384 с.

2. Глазков Ю.А. ОГЭ. Математика. Задачник. Сборник заданий и методических рекомендаций / Ю.А. Глазков, М.Я.Гаиашвили. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 367 с.

3. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

4. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов пед. университетов / под научн. ред. В.В. Орлова. – М.: Дрофа, 2007. – 320 с.